

有限要素法 (その1)

— 概 説 —

沢田 敏男* 中島 保治**

まえがき

有限要素法は、近年構造力学をはじめ熱および流体力学など広汎な分野で活用され極めて有用であることが実証されつつある。

学会誌編集委員会として、これに関する講座を企画され実現のはこびとなったことは、まことに時宜を得たものと考えられご同慶にたえない。本講座の構成(予定)は以下のとおりである。

- (1) 有限要素法の概説
沢田敏男(京大) 中島保治(農林省)
- (2) 行列とその演算
青山威康(京大)
- (3) マトリックス法構造力学と有限要素法
仲野良紀(農土試) 田中忠次(農土試)
- (4) 二次元応力解析における有限要素法
仲野良紀(農土試) 田中忠次(農土試)
- (5) 大次元行列の解法と三次元応力解析
篠 和夫(高知大) 青山威康(京大)
- (6) 板の問題における有限要素法
長谷川高士(京大)
- (7) 固有値問題と動的応答解析
青山威康(京大)
- (8) 非線形応力解析における有限要素法
青山威康(京大)
- (9) 浸透流解析と流体問題
吉武美孝(岡山大) 加納 敬(京大)
- (10) 設計への応用
長谷川高士(京大)

本講座内容は、広く会員諸氏にお読みいただくよう、努めて平易に入門的なものにするよう各執筆者が心掛けているが、構造力学や流体力学の基礎的知識をもつものとの一応の前提で記述することにした。

* 京都大学農学部(さわだ としお)

** 農林省農林水産技術会議研究管理官(なかじま やすじ)

I. 有限要素法の原理と特徴

1. 有限要素法の原理

有限要素法(Finite Element Method, F. E. M. と略記)の根本原理は、すでに19世紀に発見され、その理論が完成していたようであるが、当時電子計算機のような強力な計算手段がなかったために近年に至るまで活用されずにきた。1950年ごろ、電子計算機が開発され使用されるようになってから、この有限要素法は一躍脚光を浴び、とくに1956年、アメリカの航空学会で発表された Turner, Clough, Martin および Topp らの論文("Stiffness and Deflection Analysis of Complex Structures", J. Aero. Soc., 23.) 以来、飛躍的に発展を遂げ、今日応用力学の広い分野にわたり大きい貢献をもたらしつつある。さて有限要素法は、最初はトラスのような骨組構造を対象として考えられた。しかし、現在は同じ原理を拡張して、板やシェルなどの連続体の解析もできる一般的な構造解析の手法となっている。その基本的な考え方は連続構造物を有限個の小さな要素(あるいは部材)に分割して、これを骨組の部材として考え、部材端(節点)において力の平衡条件や適合条件などを用いて、条件式

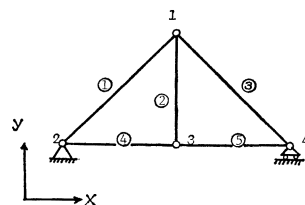


図-1 平面トラス

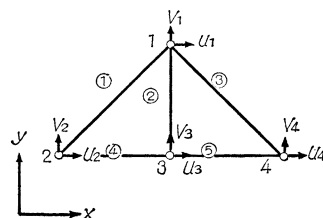


図-2 節点変位

を組立ててゆくのである。この小さな要素のことを有限要素といい、このような解析法を有限要素法と呼んでいる。すなわち、構造物を有限個の小さな要素の集合体と考えて解析する近似解法であり、“有限要素”とは有限個の小さな要素、いいかえれば無限小でなく有限の大きさをもつ

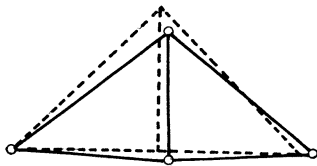


図-3 平面トラスの変形例

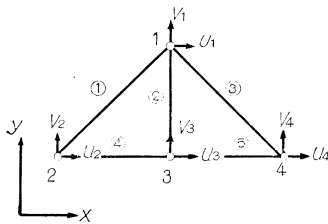


図-4 節点力

た要素という意味である。図-1に示す平面トラスは、5本のトラス部材から構成されているが、この各部材をそれぞれ一つの有限要素と考えれば、このトラスは五つの有限要素からなる構造物といえる。

このトラスに外力が働くとトラス全体に変形を生じ、それに伴い有限要素の五部材も変形するが、有限要素法では各部材の節点 (node) の変位 (nodal displacement) によって変形状態が定義されるものである。すなわち、トラス全体の変形状態が四つの節点の変位によって表わされるものと考えるのである。この節点の位置をどこに求めるかが有限要素の分割に直接関係するので問題であるが、トラスやラーメン構造における節点はそれらの各構成部材端が最も適当である。また、有限要素法における節点変位とは上述のような部材端の変位と回転角の総称である。

さて、図-1に示した平面トラスの節点は図中に1~4の番号をつけた四つがあり、図-2に示すように各節点における x, y 方向の変位が節点変位となる。ゆえにこのトラスの変形状態は8個の節点変位 ($u_1 \sim u_4, v_1 \sim v_4$) によって表わされることになる。図-3にはこの平面トラスの変形例を示している。なお、トラス構造には節点の回転角は考えなくてもよい。このようにトラスが変形して平衡状態にあるとき、有限要素の各部材には内力が発生するが、これらの力はすべて節点を通じてのみ伝達される。換言すれば、このトラス構造物内に発生している内力の状態は、節点に作用する力 (節点力, nodal force) によって表わされると考えることができる。すなわち、トラスのような骨組構造においては、力は部材結合部を通じてある部材から他の部材へと伝達されるもので、その部材の両端 (節点) の節点力が与えられればこの部材内の応力を求めることができる。

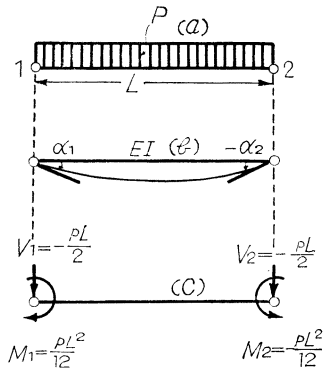


図-5 等分布荷重の等価節点力

次に、有限要素法では外力もまた節点を通じて構造物に伝わるものと考えている。これは上述のように節点を通じて伝達される内力とのつり合いを考えることから必要な仮定条件である。図-4には平面トラスにおける各節点に働く x, y 方向の8個の外力 ($U_1 \sim U_4, V_1 \sim V_4$) を示す。さて、上述のように、外力は節点を通じてのみ構造物に働くと仮定すると、有限要素の部材に作用する分布荷重や部材中央に加わる集中荷重等の取扱いができないことになるが、このような場合に対して有限要素法では次のようにくふうしている。

すなわち、図-5(a)に示すような等分布荷重をうける有限要素の部材1個を取出して考えると、等分布荷重と等価な集中力 $V_1 = V_2 = -1/2pL$ を両端の節点におきかえて作用させるとともに、図-5(b)に示すようにこの等分布荷重によって両端節点におこる変位 (回転角) $\alpha_1 = -\alpha_2 = \frac{pL^3}{24EI}$ を生じさせるためのモーメント $M_1 = -M_2 = \frac{pL^3}{12}$ を作用させれば実際の状態に近似することができる。このように、実際に作用している等分布荷重と等価な節点集中力 $-1/2pL$ と端モーメント $\pm 1/12pL^2$ とを等価節点力 (equivalent nodal force) と呼ぶ。なお、図-5に示す等分布荷重の代りに部材中央に軸垂直方向の集中荷重 P が作用した場合の等価節点力は節点集中力としての $-P/2$ と端モーメント $\pm PL/8$ とである。上述のような等価節点力の換算に当っては構造力学におけるモールの法則 (Mohr's law) や仮想仕事の原理 (principle of virtual work) を用いればよい。

次に図-6に示すような両脚固定門型ラーメンについて考えると、このラーメンは四つの有限要素から構成されている。両脚固定門型ラーメンの場合には、図-7に示すように、各節点の変位は x, y 方向の変位 u, v の他に

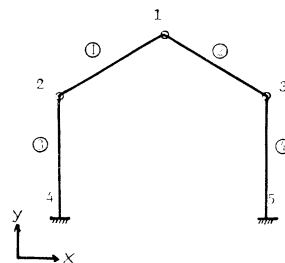


図-6 両脚固定門型ラーメン

節点回転角 α をも考えなければならないので、このようなラーメンの全体の節点変位は $3 \times 5 = 15$ 個となる。この15個の節点変位 ($u_1 \sim u_6, v_1 \sim v_5, \alpha_1 \sim \alpha_5$) が明らかになればラーメン全体の変形状態が

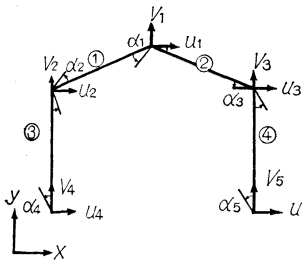


図-7 節点変位

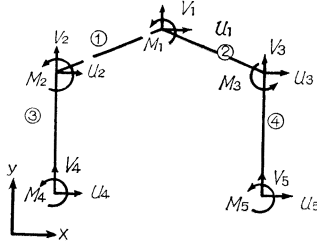


図-8 節点力

求められる。次に、このようなラーメンの場合の節点力としては図-8に示すような x, y 方向の力 U, V およびモーメント M を考えなければならない。この15個の節点力 ($U_1 \sim U_5, V_1 \sim V_5, M_1 \sim M_5$) によってラーメンの応力状態が表わされることになる。

以上述べたトラスやラーメンの例示からわかるように、結局、構造物の変形状態および応力状態は有限個の節点変位 (節点回転角をも含む) および節点力 (モーメントも含む) によって表わされることになる。すなわち、有限要素法では部材を離散化した状態の、自由度をもつ系におきかえて解析するもので、たとえば図-1に示すトラス構造は8自由度系であり、図-6のラーメンは15自由度系とみなされる。

図-1の平面トラスにおける3本のトラス部材① (1~2), ② (1~3), ③ (1~4) が集っている節点1について考え、構造力学における適合条件および平衡条件などを用いて節点変位を未知数とする連立一次方程式を誘導してみよう。

さて、節点1で三つの有限要素の部材を切離して考え、部材①における節点1での x, y 方向の変位を $u_1^{\textcircled{1}}, v_1^{\textcircled{1}}$ とする。以下同様に部材②, ③における節点1での変位をそれぞれ、 $u_1^{\textcircled{2}}, v_1^{\textcircled{2}}, u_1^{\textcircled{3}}, v_1^{\textcircled{3}}$ とする。節点1は3部材の共有であるから、明らかに次式に示す適合条件 (compatibility condition) 式が成立する。

$$\left. \begin{aligned} u_1^{\textcircled{1}} &= u_1^{\textcircled{2}} = u_1^{\textcircled{3}} (=u_1) \\ v_1^{\textcircled{1}} &= v_1^{\textcircled{2}} = v_1^{\textcircled{3}} (=v_1) \end{aligned} \right\} \dots\dots (1.1)$$

さて、次に節点1に生じている力について考え、上述の節点変位と同様の表示で節点1に働く各部材の x, y 方向の内力をそれぞれ、 $U_1^{\textcircled{1}}, V_1^{\textcircled{1}}, U_1^{\textcircled{2}}, V_1^{\textcircled{2}}, U_1^{\textcircled{3}}, V_1^{\textcircled{3}}$ とする。一方、節点1に作用する x, y 方向の外力を P_{x1}, P_{y1} とすれば、この節点における内外力の平衡の条件 (equilibrium condition) から次式が成立しなければならない。

$$\left. \begin{aligned} U_1^{\textcircled{1}} + U_1^{\textcircled{2}} + U_1^{\textcircled{3}} &= U_1 = P_{x1} \\ V_1^{\textcircled{1}} + V_1^{\textcircled{2}} + V_1^{\textcircled{3}} &= V_1 = P_{y1} \end{aligned} \right\} \dots\dots (1.2)$$

そこで、もし各部材について、節点力がそれぞれの節点変位の関数として表わすことができると仮定すれば次式が成立する。

$$\left. \begin{aligned} U_1^{\textcircled{1}} &= g_x^{\textcircled{1}}(u_1^{\textcircled{1}}, v_1^{\textcircled{1}}, u_2^{\textcircled{1}}, v_2^{\textcircled{1}}) \\ V_1^{\textcircled{1}} &= g_y^{\textcircled{1}}(u_1^{\textcircled{1}}, v_1^{\textcircled{1}}, u_2^{\textcircled{1}}, v_2^{\textcircled{1}}) \\ U_1^{\textcircled{2}} &= g_x^{\textcircled{2}}(u_1^{\textcircled{2}}, v_1^{\textcircled{2}}, u_3^{\textcircled{2}}, v_3^{\textcircled{2}}) \\ V_1^{\textcircled{2}} &= g_y^{\textcircled{2}}(u_1^{\textcircled{2}}, v_1^{\textcircled{2}}, u_3^{\textcircled{2}}, v_3^{\textcircled{2}}) \\ U_1^{\textcircled{3}} &= g_x^{\textcircled{3}}(u_1^{\textcircled{3}}, v_1^{\textcircled{3}}, u_4^{\textcircled{3}}, v_4^{\textcircled{3}}) \\ V_1^{\textcircled{3}} &= g_y^{\textcircled{3}}(u_1^{\textcircled{3}}, v_1^{\textcircled{3}}, u_4^{\textcircled{3}}, v_4^{\textcircled{3}}) \end{aligned} \right\} \dots\dots (1.3)$$

上記の (1.2) 式と (1.3) 式の関係から、節点1に作用する外力と節点変位の関係を求めれば次式を得る。

$$\left. \begin{aligned} P_{x1} &= g_x^{\textcircled{1}} + g_x^{\textcircled{2}} + g_x^{\textcircled{3}} \\ P_{y1} &= g_y^{\textcircled{1}} + g_y^{\textcircled{2}} + g_y^{\textcircled{3}} \end{aligned} \right\} \dots\dots (1.4)$$

ここで上式は節点1についての力のつり合い条件式を、そこに集まる各部材の節点変位によって表わすことができることを示す。なお、上述の適合条件の (1.1) 式から、次のように、変位を表わす記号を整理すれば、

$$\begin{aligned} u_1^{\textcircled{1}} &= u_1^{\textcircled{2}} = u_1^{\textcircled{3}} = u_1 \\ v_1^{\textcircled{1}} &= v_1^{\textcircled{2}} = v_1^{\textcircled{3}} = v_1 \\ u_2^{\textcircled{1}} &= u_2, \quad v_2^{\textcircled{1}} = v_2, \dots\dots, \quad v_4^{\textcircled{3}} = v_4 \end{aligned}$$

(1.4) 式は次式のように書き換えられる。

$$\left. \begin{aligned} P_{x1} &= G_{x1}(u_1, v_1, u_2, v_2, u_3, v_3, u_4, v_4) \\ P_{y1} &= G_{y1}(u_1, v_1, u_2, v_2, u_3, v_3, u_4, v_4) \end{aligned} \right\} \dots\dots (1.5)$$

上式は節点1に作用する外力は、その節点に集まっている三部材のもつ節点全部の変位によって表わされることを示している。上式と同じような式を他の節点 (図-1の場合は節点2, 3, 4) についても誘導することができ、したがって、すべての節点変位数に相当する連立方程式を作ることができる。図-1のトラスについては8元の連立方程式が得られる。さらに (1.3) 式の関係が一次式で十分近似できるとすれば (この近似度合いが計算精度に関係するので、いかにして節点力を節点変位の一次式として表現するかが重要な問題である)、(1.5) 式も連立一次方程式となり、求めんとする各節点のすべての変位を計算することができ、その節点変位を用いて各有限要素の部材のヒズミや応力が計算される。以上が有限要素法の原理である。

有限要素法で作成する連立一次方程式の元数は、一般に簡単な構造でも数十元になり、少し複雑なものは数百~数千元となるので、この多元連立方程式の解法は電子計算機以外にはない。したがって、大型電子計算機の利用が前提条件となっている。このように有限要素法による主要な解析計算は、大型電子計算機によって行われるのであるが、その解析手順の模式図を図-9に示す。

2. 有限要素法の特徴

有限要素法は前述のように急速な発展を遂げ、二次元の線形・非線形弾性問題、ポテンシャル論の場合における問題、三次元弾性問題への応用、大変形問題への適用、固有値問題への適用、あるいは動的弾性問題への適用など広い分野において活用されて効力を発揮している。そこで他の解法に比べて顕著な特徴をあげれば、①解析領域が、複雑な境界形状であっても、任意の精度の解を得ることができる。②解析領域内で要素の密度を変化させて、所要の解析精度まで高めることができる。③材料的にも外力的にも非線形問題が解析できる。④変位解が容易に求められることなどのすぐれた点を備えている。しかし、すぐれた汎用性を持つ有限要素法においてもその解析精度を高めることに関して、解析領域の境界条件の

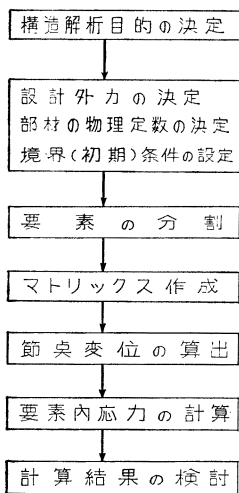


図-9 有限要素法による解析手順の模式図

設定法や要素の分割法、部材の物理定数の決定法、数値計算の方法等にとくに注意すべき問題が指摘される。また解析コストに関する経済性的の問題点も指摘されている⁹⁾。

II. 有限要素法の連続体構造解析への適用

平板やシェル、または三次元体の連続

体を有限個の小さな要素に分割し(要素の形状は平板やシェルに対しては三角形の平板あるいは曲板要素、四辺形の平板あるいは曲板要素が用いられ、三次元構造の場合は四面体、六面体要素などが用いられる)、これを骨組の部材と同じように考え、解析する方法である。連続体における有限要素は多角形平板や多面体であるので、節点はこれら要素の各頂点にあるものとする。すなわち、平板要素や立体要素では、3~8個の節点を持つこととなる。連続体解析に用いる有限要素の変形状態も各節点の変位によって表現されるものと仮定する。したがって複雑な構造形状に対しては、より小さな要素に分割しなければその精度をあげることはできない。図-10は、北陸農政局内の倉ホローダムのエレメントの解析に当り要素分割した例で、ダイヤモンドヘッドとウェーブおよびB.Cジョイントなどの剛性を変化させて解析している⁹⁾。

図-11は、関東農政局深山ダム(アスファルト表面ジャボロックフィルダム)の地震応答解析に用いたF.E.M.ダムモデルで、Aタイプはダム地盤を含み、Bタイプは堤体みのモデルである⁹⁾。図-12、図-13は、近畿農政局呑吐ダム⁹⁾のダムサイトにおける断層処理に関する解析例で堤軸にほぼ直角方向に走る2本の断層処理のF.E.M.モデルである。

以上の解析例のように連続体の有限要素が分割決定されれば、骨組構造の場合と同様に節点変位と節点力に関する一次式を求め、未知の節点変位に関するマトリックスを作成し、これを解いて節点変位を求め、要素内の応力を計算する。この手順は、図-9に示したとおりである。なお有限要素法の浸透流解析と流体問題への適用は“運動領域内において与えられたエネルギーのもとで、

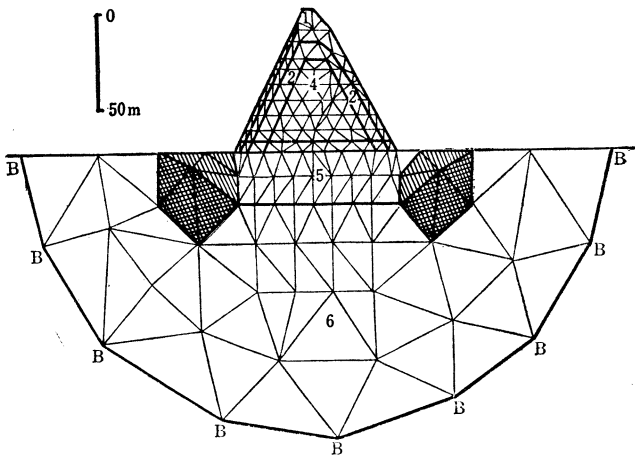
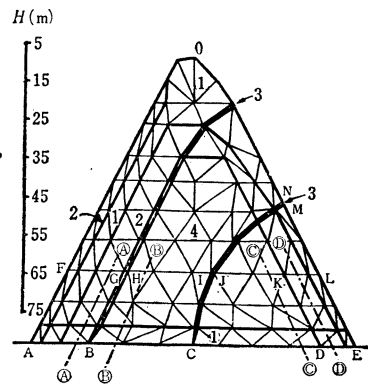


図-10 ダムのモデル化



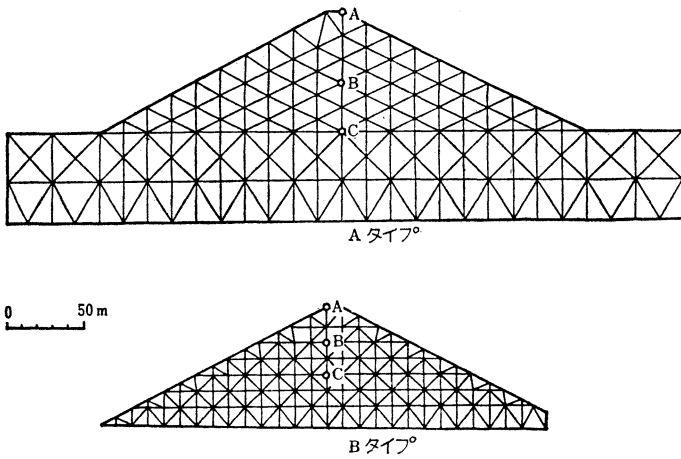


図-11 2種類のF.E.M. ダムモデル

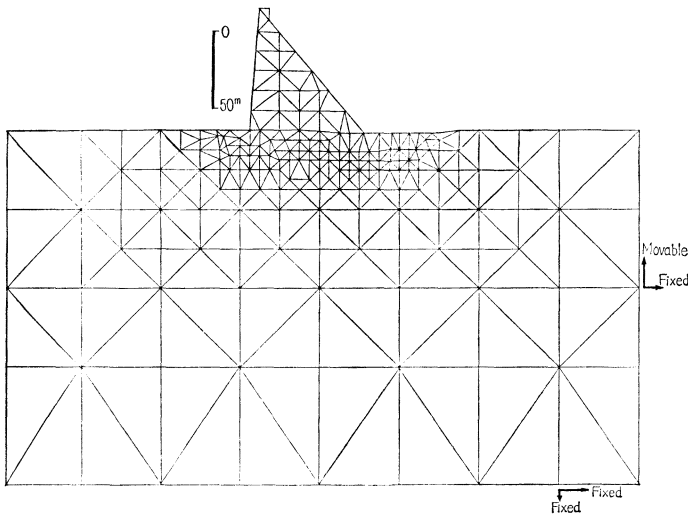


図-12 ダム基礎地盤の断層処理モデル (横断面)

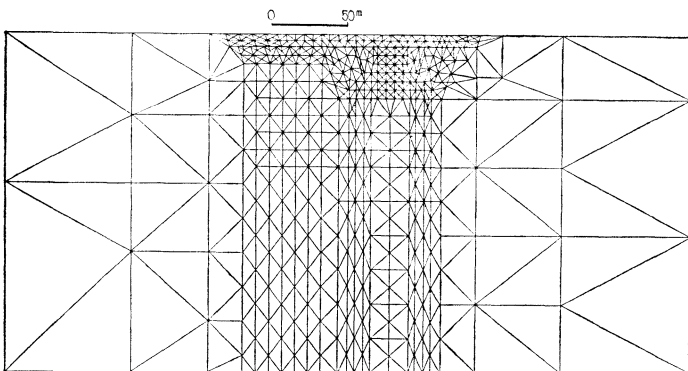


図-13 ダム基礎地盤の断層処理モデル (縦断面)

流量が最大となるような流れ方をする” (すなわち構造力学における最小仕事の原理に相当する) という原理⁸⁾ を認め、数学的には速度ポテンシャルに関する汎関数を運動領域内で最小にする問題として解き、各節点における速度ポテンシャルを求めていく手法である。

以上は、有限要素法の歴史、原理あるいはこの手法の特徴などについて概述し、さらに連続体構造への適用問題にもふれたが、これらに関する詳述は次回以下の各章においてなされる。

おわりに、本文の記述に当たり、とくに下記引用文献を参考にさせていただいたことを記し、各著者に対し深く謝意を表すものである。

引用文献

- 1) Zienkiewicz, O.C.: The Finite Element Method in Engineering Science, McGraw-Hill (1971)
- 2) 三本木茂夫, 吉村信敏: 有限要素法による構造解析プログラム, コンピュータによる構造工学講座 I-1-B, 培風館 (1970)
- 3) 沢田敏男, 長谷川高士, 青山威康: Finite Element 法によるホローダムの力学的諸問題の解析, 農土論集 33, pp. 62~75 (1970)
- 4) 沢田敏男, 青山威康: 表面シャボロックフィルダムの静力学的挙動について, 農土論集 40, pp. 56~66 (1972)
- 5) 青山威康, 沢田敏男: フィルダムの地震応答解析について—フィルダムの地震時応力解析(2)—, 農土論集 47, pp. 22~34 (1973)
- 6) 吉村信敏: 有限要素法計算上の問題点, 日本航空宇宙学会誌 21 (239), pp. 746~750 (1973)
- 7) 河田幸三: 実験力学の諸手法と有限要素法, 日本航空宇宙学会誌 21(239), pp. 705~720 (1973)
- 8) 沢田敏男: 浸透水の流動に関する研究 (V), 農土研 21 (5), pp. 5~15, (1954)
- 9) 沢田敏男, 青山威康, 神谷周利: 呑吐ダムにおける基礎処理工について, 農土誌 42 (3), pp. 166~171 (1974)

[1974. 2. 19. 受稿]