
 講 座

海岸水理学 (1)

中 村 充*

I. まえがき

海岸水理学は水理学の中では比較的未解の分野といえる。他方高潮、津波、台風波浪、海岸侵食といった防災問題、沿岸土地資源の高度利用といった時代の要請と相まって近年の海岸水理学（広くは海岸工学）の発展は目覚ましい。ここに講座として海岸水理学の現況を実用的面から紹介するが、これらの多くは研究途上のもので、例えば完全弾性体の定義の上に組立てられた弾性論や、これに立脚した構造力学のような不変のものは少なく、刻々に書き改められていく性質のものである。特に砕波帯以浅の海岸現象について取残された問題が多く、しかもわれわれの対象とする海岸工事は主としてこの領域に属するものであることを思えば、研究、工事施工体験、現地調査など、相関連して効率的な開発を計らなければならない。

II. 波の一般的性質

1. 波のいろいろ

水の波は一つの定まった波形が繰返される単一波 (Elementary wave) と、いろいろな単一波の集団である群波 (Group wave) がある。単一波において波形の最高点を波の峰 (Wave crest)、最低位部を谷 (Wave trough)、峰と峰あるいは谷と谷の間隔を波長 (Wave length)、峰と谷の高さの差を波高 (Wave height)、波形の繰返される時間すなわち一つの峰または谷が定点を通過してから次の峰または谷が通過するまでの時間を周期 (Wave period)、波の伝わる速さを波速 (Wave velocity) という。波についての大切な無次元量として波高を波長で割ったもの「これを波形コウ配 (Steepness) という」、水深を波長で割ったもの「これを相対水深または比水深 (Shallowness or Relative depth) という」などがある。

群波において波長の少しずつ異なる単一波を合成してゆくと、合成波の一波一波は干渉によって波高は異なったものとなるが、この波高分布もまた周期性をもち一定時間置きに同じ波が出現する。このように一波一波ではなく一群として周期性をもった波群全体が群波であって

その進行速度を群速度 (Group velocity) という。海の波のエネルギーはこの群速度で進行する。

海岸の波は群波に属するもので種々の周期、波高の波の集団であるから、実際に観測される波は、複雑な周期、波高である。したがってこの複雑な波の集団の代表値を定めておくことが便利であり、代表波として次のものがある。

有義波 (Significant wave); 連続観測波高の大きい方から数えて、全波数の 1/3 の波数の波の平均値で有義波高 ($H_{1/3}$)、有義波周期 ($T_{1/3}$) で示す。

1/10最大波; 連続観測波高の大きい方から数えて全波数の 1/10 波数の波の平均値で、これを 1/10 最大波高 ($H_{1/10}$)、1/10 最大波周期 ($T_{1/10}$) で示す。

平均波; 全観測波の平均値で波高、周期を \bar{H} 、 T で示す。

最大波; 全観測波中の最大の波で、波高、周期を H_{max} 、 T_{max} で示す。これは観測波数の多いほどすなわち観測時間の長い程大きな値があらわれる可能性がある。

これらの代表波の中で実用上最も重要なのは有義波である (実用上の諸式、資料が有義波で表現されているものが多い)。また 10~20 min 以上 (約100波以上) の波の連続観測記録を用いれば、波群全体の波高分布が一定し、各代表波高の間に次の関係がある。

$$\frac{H_{1/3}}{\bar{H}} = 1.60, \quad \frac{H_{1/10}}{H_{1/3}} = 1.27,$$

$$\frac{H_{max}}{H_{1/3}} = 1.1\sqrt{\log N} \leq 1.9$$

(但し N は波数で波の継続時間を周期で割ったもの)

波動運動は表面程はげしく、深部にゆくにつれて小となり、ある深さ以下にはおよばない。したがって深さによって、海底の影響を受ける場合と、受けない場合があり、前者を浅海波 (Shallow sea wave)、後者を深海波 (Deep sea wave) という。その限界はほぼ波長の 1/2 の深さで、これより深いものを深海波、浅いものを浅海波と考えてよい。

海の波は主として風によって起こる。暴風域内で発生

* 農林省農業土木試験場

した種々の周期の波のうち周期が大きく波高の小さな成分は波速が大で減衰も小さいため暴風域の外に伝わり、海岸に到達する。これを風域内の波である風波 (Wind wave) と区別して「うねり」 (Swell) という、土用波はこれである。

以上は普通重力波 (General gravity wave) と呼ばれるものについてであり、これには0.1~1secの周期の短周期表面波 (Short period surface wave), 1~30secの周期の普通表面波 (General surface wave), 30sec~5minの周期の長周期表面波 (Long period surface wave) がある。

周期が0.1sec以下になると重力の他に表面張力の影響が大きくなり、これを表面張力波 (Capillary wave) という。この他に津波や高潮のような5分以上の周期の波を長周期長波 (Long period long wave) といい、月や太陽の引力による12時間、または24時間周期の波を潮波 (Tide) という。

この項で述べる波は普通重力波についてであり、重要なのは、波の発生の問題、変形到達の問題、作用の問題である。

2. 波の理論

(1) 波の理論上の分類 波の種類については前項でのべたが、その数学的扱いにおいても区別される。水の波は非圧縮性流体の運動として運動方程式と連続方程式より議論されるが、まず粘性項を省略し非回転理論として扱われる。ここではこの式についての詳細な展開はやめ、取扱いの基本的な考え方についてのみのべる。

数学的表現および取扱いによる種類をあげれば表-1のようである。

表面波は現象的には、表面の波動現象が水深に比べて小さく、水粒子の波動現象が鉛直方向に漸変することを扱う。特に振幅が微小で水深に対し省略され、水粒子速度も小で、その2次以上の項を省略できる場合の波を微小振幅波といい、振幅すなわち波高が水深に対して省略されず、波形コウ配の形で関係する波を有限振幅波という。

長波は波長が非常に長く、波高、水深が波長に対して非常に小さく、水粒子の波動現象は鉛直速度 w が小で、 $w=0$ が他の量に対し仮定できる波である。

サージは広い意味で高潮、津波、セイシュ、副振動、ビートなどの総称である。

高潮は台風の通過によって生ずる異状潮位をいう。その原因は気圧低下による潮位上昇と、そのエネルギーを蓄えた長波としての変形による上昇、これに刺激されて生ずる副振動、セイシュとの共鳴など、他方風が海面に

表-1

| | | |
|------------------------|-------------------------------------|--|
| 水の波 (Water wave) | 微小振幅波 (Wave of small amplitude) | 深水微小振幅波 (Deep water wave of small amplitude) |
| | | 浅水微小振幅波 (Shallow water wave of small amplitude) |
| | 表面波 (Surface wave) | ストークスの波 (Wave of Stokes theory) |
| | | 孤立波 (Solitary wave) |
| | 有限振幅波 (Wave of finite amplitude) | クノイド波 (Cnoidal wave) |
| | | その他 |
| 長波 (Long wave) | サージ (Surge) | 高潮 (Storm surge) |
| | | セイシュ (Seiche) |
| | 副振動 (Secondary undulation) | |
| 潮波 (Tidal wave) | 津波 (Tsunami or Earthquake surge) | |
| | ビート (Beat) | |
| 段波 (Hydraulic bore) | | |
| その他 | | |

接線応力 (Tangential stress, Shear stress) を与え、この力で海水が海岸に輸送され、滞積する。いわゆる風の吹きよせによる潮位上昇がある。湾が大きく入りこんで湾奥に向かって浅くなっているときは、長波としての浅水変形が大きく、平面的に狭くされている場合は一層大きな潮位となる。さらにこの波は湾奥においては、反射波と重複して大きな潮高を引き起す。この現象は台風の中心が湾奥に向かって長波の波速 ($=\sqrt{gh}$) と等しく湾軸の西側 (北半球の場合) を移動するとき一層大きなものとなる。吹きよせによる海水の滞積作用は、海水の鉛直渦粘性と海底摩擦 (Bottom shear stress) にささえられて起るものであるから底面の影響の大きい浅い海ほど

大きく、深い海では大きくなり得ない。また風の界面応力の作用する長さ、すなわち湾の奥行(対岸距離;Fetch)の大きいほど、吹きよせによる潮位上昇は大きい。

津波は海底の隆起、陥没、海底火山など地殻変動によって発生する長波で、震源地を中心に放射状に進行するが、海底地形の影響を受け屈折して分散、収レンが起る。洋上では津波エネルギーは深い水深に分散されているから大きな現象は表われないが、沿岸の浅瀬にくとエネルギーが鉛直方向に集中して波高を急増する。さらにV字形湾のように平面的にもエネルギー集中が起るところでは、極めて大きな波高となる。湾の副振動周期に津波周期が一致するとき、湾奥波高は最も大きく、津波周期の方が長いときこれについて大きく、津波周期の方が短いとき、湾内は多節の振動となって小さい波高となる。

セイシュ、副振動は湖や湾の固有振動をいい、前者は湖や湾口が湾の幅に比して小さい場合に生ずる湾の中央部に節をもつ自由振動であり、後者は外海に開いた湾口をもつ湾において生ずる湾口に節をもつ自由振動である。なおこの振動の倍周波多節の自由振動もあるが、問題となるのは単節のものであり、まれに双節のものまである。

ビートは1~60 minの周期をもった波で、港湾において防波堤によってしゃへいされにくい成分であることと、船舶周期と共振することから、港における重要な問題の一つとして取り上げられてきた。その発生についてムンク(Munk)は、群波が海岸で砕けるととき群波の周期に対応して数分周期の水面振動が起り、波群のうねり(Beat)に対応したこの現象をサーフ・ビート(Surfb-eats)と名付けた。これが反射して港内に侵入しビートイングを起すとされているが、特にこの種の現象が単に港湾の問題であるだけでなく、遠浅沿岸や砕波帯内の海岸工事を主とする農業土木において、設計潮位決定上重要な現象であることを指摘したい。

ここでは前項でのべた波の数学的扱いの大略について述べる。

(2) 微小振幅波 粘性項を省略した渦なしの理論では、速度ポテンシャル (Velocity potential) φ が存在して、このときの Bernoulli の定理は、

$$-\frac{\partial\varphi}{\partial t}-\frac{q^2}{2}+\Omega+\frac{p}{\rho}=F(t)$$

ここに $q^2=u^2+v^2+w^2$ (u, v, w ; x, y, z 方向の流速), Ω ; 重力ポテンシャル ($=gz$), p ; 圧力, ρ ; 密度, $F(t)$; t についての任意の積分定数。

q^2 を省略し $F(t)$ を φ に含めて示すと、

$$-\frac{\partial\varphi}{\partial t}+gz+\frac{p}{\rho}=0 \dots\dots\dots(1)$$

静水面を基準にとり $z=0$ とし、波の高まりを $z=\eta$ で示し、水深を $z=-h$ とする。

$$z=\eta \text{ で } p=0 \therefore \eta=\frac{1}{g}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)_{z=\eta} \dots\dots\dots(2)$$

水面 ($z=\eta$) の鉛直速度 $\frac{\partial\eta}{\partial t}$ は φ を z で、微分して得られるから

$$\frac{\partial\eta}{\partial t}=-\frac{\partial\varphi}{\partial z}=\frac{1}{g}\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}\right)_{z=\eta}$$

また $\eta \ll h$ であるから、上記の条件 ($z=\eta$) は、近似的に $z=0$ における条件と考え得る。すなわち、

$$z=0 \text{ で } \frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}+g\frac{\partial\varphi}{\partial z}=0 \dots\dots\dots(3)$$

この式は波の表面条件である。

また φ は連続条件も満足しなければならないから、

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial w}{\partial z}=0$$

ここに $u=-\frac{\partial\varphi}{\partial x}$, $w=-\frac{\partial\varphi}{\partial z}$

$$\therefore \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}=0 \dots\dots\dots(4)$$

底面では $w=0$ であるから

$$z=-h \text{ で } \frac{\partial\varphi}{\partial z}=0 \dots\dots\dots(5)$$

さて、 φ に関する条件式 (2) (3) (4) (5) はいずれも線形であるから、解の重ねが可能である。以下 φ が、 x 方向に単振動 (Simple harmonic motion) する場合 (6) について解くが、より一般的な波動についてはフーリエ (Fourier) 級数を用いて以下の解を重ね合えればよい。

$$\varphi=f(z)\cos k(x-ct) \dots\dots\dots(6)$$

ここに k は x 方向に同じ位相の繰返される長さ L (波長) で次のように示される。

$$k=\frac{2\pi}{L} \dots\dots\dots(7)$$

また c は、一定時間 T (周期) ごとに同じ位相が繰返されるために、

$$kc=\frac{2\pi}{T}$$

$$c = \frac{2\pi}{T} \cdot \frac{L}{2\pi} = \frac{L}{T} \dots\dots\dots (8)$$

$$L = \frac{gT^2}{2\pi} \tanh \frac{2\pi h}{L} \dots\dots\dots (11)$$

であり、これは T 時間に L だけ x 方向に位相の進行することを示し、 c は波速である。

また (9) 式を (2) 式に代入して、

(6) 式を (4) 式に代入して、

$$\eta = \frac{kc}{g} A \cosh kh \sin k(x-ct) \dots\dots\dots (12)$$

$$\frac{d^2}{dz^2} f(z) - k^2 f(z) = 0$$

また H を波高として

$$\therefore f(z) = c_1 e^{kz} + c_2 e^{-kz}$$

$$\eta_{max} - \eta_{min} = H$$

(5) 式の条件より

故に

$$c_1 e^{kh} = c_2 e^{-kh}$$

$$2 \frac{kc}{g} A \cosh kh = H$$

でこれを $A/2$ とおくと

よって

$$f(z) = A \cosh k(z+h)$$

$$\therefore \varphi = A \cosh k(z+h) \cos k(x-ct) \dots\dots\dots (9)$$

$$A = \frac{gH}{2kc \cosh kh}$$

(9) を (3) 式に代入して、

あるいは (10) 式の関係を用いて

$$c = \sqrt{\frac{g}{k} \tanh kh}$$

$$A = \frac{Hc}{2 \sinh kh} \dots\dots\dots (13)$$

$$= \sqrt{\frac{Lg}{2\pi} \tanh \frac{2\pi h}{L}} \dots\dots\dots (10)$$

(8) と (10) より

したがって (9) 式は

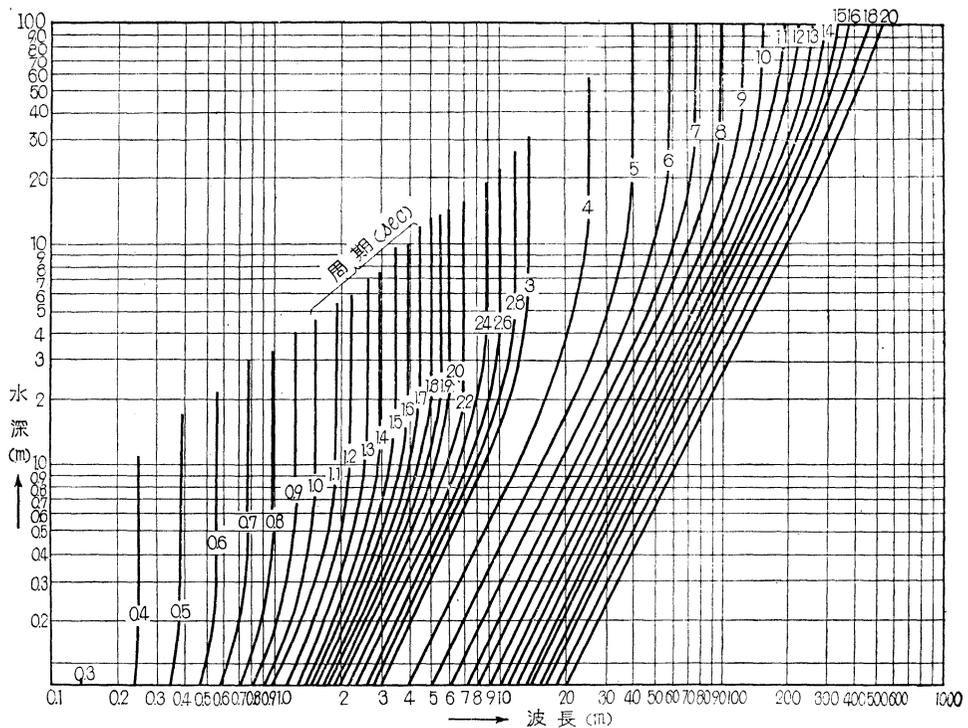


図-1 水深、周期、波長の関係

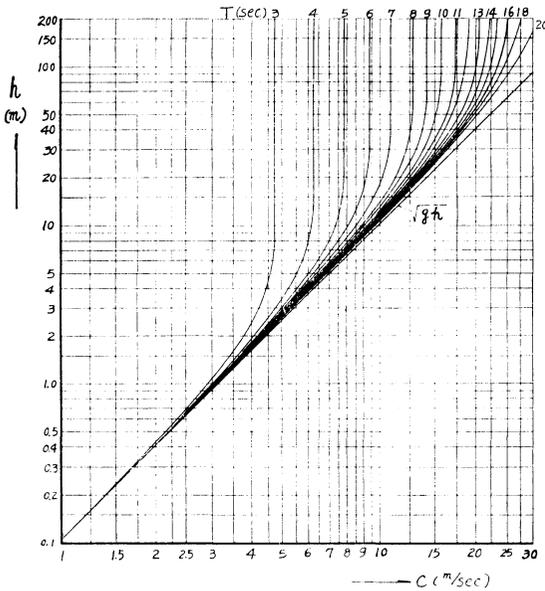


図-2 水深, 周期, 波速の関係

$$\varphi = \frac{Hc}{2} \frac{\cosh k(z+h)}{\sinh kh} \cos k(x-ct) \dots (14)$$

波形 η は (12) 式から

$$\eta = \frac{H}{2} \sin \left(\frac{2\pi}{L}x - \frac{2\pi}{T}t \right) \dots (15)$$

水粒子の移動速度 u, w は,

$$u = -\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\pi H}{T} \cdot \frac{\cosh 2\pi(z+h)/L}{\sinh 2\pi h/L} \sin \left(\frac{2\pi}{L}x - \frac{2\pi}{T}t \right) \dots (16)$$

$$w = -\frac{\partial \varphi}{\partial z} = -\frac{\pi H}{T} \frac{\sinh 2\pi(z+h)/L}{\sinh 2\pi h/L} \cos \left(\frac{2\pi}{L}x - \frac{2\pi}{T}t \right) \dots (17)$$

などが得られる。また (14) 式を (1) に代入すれば、任意点の水圧 p を求める式が得られる。上記の諸式は浅水面波であり、以上の式で $h=\infty$ とおけば、深海表面波が得られる。

(10) (11) 式の関係を図示したのが 図-1, 図-2 である。

(3) 有限振幅波 前項の微小振幅波では (2) (3), (10)~(11) 式で波高 η が水深 h に対し十分小さいとして計算した。したがって η が h に対し有限の値として扱わなければならない場合、すなわち浅瀬に波が進行し

てきたとき、微小振幅波理論は修正され、振幅 η , いいかえれば波高 H を考慮しなければならない。これを略述する。

①ストークスの波 この理論でも粘性項を省略して渦なしとすれば、速度ポテンシャル ϕ が存在して (2) (4) (5) 式はこの場合も成立たなければならない。 ϕ に対応する流れの函数 ψ として、(3) 式に代る表面条件

$$z=\eta \text{ で } \phi=0 \dots (18)$$

を用いて議論する。この3個の式を満足する ϕ, ψ を求める。

解は (14) 式を参考にして選ばれるが、定常的波動に直して考えるために

$$\xi = x-ct \dots (19)$$

とおけば、流速はそれぞれ

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} = \frac{\partial x}{\partial t} - c$$

ξ 系における速度ポテンシャルを Φ とすれば、上式は

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \xi} = \frac{\partial \varphi}{\partial x} - c = \frac{\partial \varphi}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial x} - c$$

よって

$$\Phi = \varphi - c\xi \dots (20)$$

このことは、波の進行方向と反対方向に、波速 c と同じ大きさの流れ $-c$ を重ねたことを意味する。この波動は時間 t を含まないから、波形は進行せずに定常運動になる。このような波を永久波形の進行波 (Progressive wave of permanent type) という。

さて (2) (4) (5) 式を満足する函数として、これらの式の線型性から (14) 式を参考にし、(19) (20) 式を用いて t を消去し、

$$\left. \begin{aligned} \frac{\Phi}{c} &= -\xi + \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n \frac{\cosh nk(z+h)}{\sinh nk h} \sin nk \xi \\ \frac{\psi}{c} &= -z + \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n \frac{\sinh nk(z+h)}{\sinh nk h} \cos nk \xi \end{aligned} \right\} \dots (21)$$

を用い、(18) 式を満足するための β を定める。

(18) 式から

$$\eta = \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n \frac{\sinh nk(\eta+h)}{\sinh nk h} \cos nk \xi$$

$\sinh nk(\eta+h)$ を展開して代入し、近似的に $n=3$ まで求めると、

$$\eta = \frac{1}{2} k \beta_1^2 \coth k h + \beta_1 \left\{ 1 + \frac{3}{8} k^2 \beta_1^2 (1 + \coth^2 k h) + k \beta_2 \left(-\frac{1}{2} \coth k h + \coth 2k h \right) \right\} \cos k \xi$$

$$+ \left\{ \frac{1}{2} k \beta_1^2 \coth k h + \beta_2 \right\} \cos 2k \xi + \left\{ \frac{1}{8} k^2 \beta_1^3 \right.$$

$$\left. (+2 \coth^2 k h) + k \beta_1 \beta_2 \left(-\frac{1}{2} \coth k h + \coth 2k h + \beta_3 \right) \right\} \cos 3k \xi \dots \dots \dots (22)$$

他方 (1) 式の表面条件は $z=\eta$ で $p=0$

$$q^2 = u^2 + v^2 = \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \xi} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial z} \right)^2$$

よって、

$$\frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \xi} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial z} \right)^2 \right\}_{z=\eta} + g\eta = 0$$

これと η の式から $\beta_1 \beta_2 \beta_3$ の関係を求めると、

$$\left. \begin{aligned} \beta_2 &= \frac{3}{4} k \beta_1^2 \coth k h (\coth^2 k h - 1) \\ \beta_3 &= \frac{k^2 \beta_1^3}{64} (\coth^2 k h - 1) (3 \coth^2 k h + 1) \\ (9 \coth^2 k h - 13) \\ \beta_1 &= \eta_{\max} - \eta_{\min} = \frac{H}{2} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (23)$$

以上の展開から結果式をあげれば

$$\eta = \frac{\pi}{4L} H^2 \coth \frac{2\pi h}{L} + \frac{H}{2} \cos \left(\frac{2\pi}{L} x - \frac{2\pi}{T} t \right)$$

$$+ \frac{1}{8} \frac{\pi H^2}{L} \frac{\cosh 2\pi h/L (\cosh 4\pi h/L + 2)}{(\sinh 2\pi h/L)^3}$$

$$\cos \left(\frac{4\pi}{L} x - \frac{4\pi}{T} t \right) + \frac{3}{128} \left(\frac{\pi}{L} \right)^2 H^3$$

$$\cdot \frac{8(\cosh 2\pi h/L)^6 + 1}{(\sinh 2\pi h/L)^6} \cos \left(\frac{6\pi}{L} x - \frac{6\pi}{T} t \right) \dots \dots \dots (24)$$

波速 c

$$c = \sqrt{\frac{gL}{2\pi} \tanh \frac{2\pi h}{L} \left\{ 1 + \left(\frac{\pi H}{L} \right)^2 \frac{\cosh 8\pi h/L + 8}{8(\sinh 2\pi h/L)^4} \right\}} \dots \dots \dots (25)$$

水粒子の速度

$$u = \frac{L}{2T} F_1^2 \cosh \frac{4\pi(h+z)}{L}$$

$$+ \frac{L}{T} F_1 \cosh \frac{2\pi(h+z)}{L} \cos \left(\frac{2\pi}{L} x - \frac{2\pi}{T} t \right)$$

$$+ \frac{L}{T} F_2 \cosh \frac{4\pi(h+z)}{L} \cos \left(\frac{4\pi}{L} x - \frac{4\pi}{T} t \right)$$

$$+ \frac{L}{T} F_3 \cosh \frac{6\pi(h+z)}{L} \cos \left(\frac{6\pi}{L} x - \frac{6\pi}{T} t \right) \dots \dots \dots (26)$$

$$w = -\frac{L}{T} F_1 \sinh \frac{2\pi(h+z)}{L} \sin \left(\frac{2\pi}{L} x - \frac{2\pi}{T} t \right)$$

$$+ \frac{L}{T} F_2 \sinh \frac{4\pi(h+z)}{L} \sin \left(\frac{4\pi}{L} x - \frac{4\pi}{T} t \right)$$

$$+ \frac{L}{T} F_3 \sinh \frac{6\pi(h+z)}{L} \sin \left(\frac{6\pi}{L} x - \frac{6\pi}{T} t \right) \dots \dots \dots (27)$$

ここに

$$\left. \begin{aligned} F_1 &= \frac{\pi H}{L} \frac{1}{\sinh 2\pi h/L} \\ F_2 &= \frac{3}{4} \left(\frac{\pi H}{L} \right)^2 \frac{1}{(\sinh 2\pi h/L)^4} \\ F_3 &= \frac{3}{64} \left(\frac{\pi H}{L} \right)^3 \frac{11 - 2 \cosh 4\pi h/L}{(\sinh 2\pi h/L)^7} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (28)$$

水粒子の残留前進速度

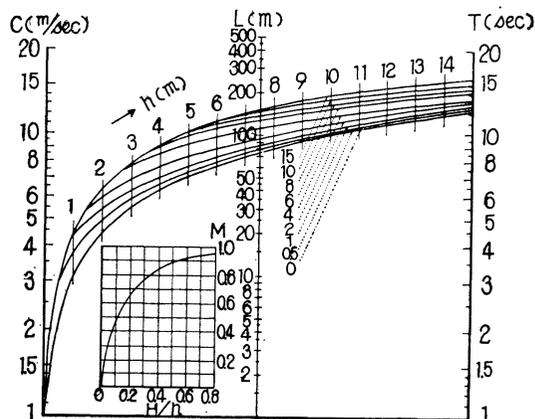
$$\bar{u} = \frac{\pi^2 H^2}{2LT} \frac{\cosh 4\pi(h+z)/L}{(\sinh 2\pi h/L)^2} \dots \dots \dots (29)$$

以上の諸式で $h/L \rightarrow \infty$ とすると、深海におけるストークスの波が得られる。

②孤立波 波が浅瀬に進行して $h/L < 0.1$ 程度となると、波のエネルギーはその波頂付近に集まり、平坦な裾をもって孤立波の波形に近くなる。すなわち浅水部の波は、孤立波が周期 T で連続して進行すると考える。孤立波理論適用の 適当な場合として ムンク (Munk) は、限界的な波長と周期を設定し、これを有効波長、有効周期という。これを L_e, T_e として (30) (31) 式の範囲で孤立波理論を用いる。

$$\frac{h}{L_e} \leq \frac{M}{2\pi} < 0.1 \dots \dots \dots (30)$$

$$\frac{h}{T_e \sqrt{gh}} \leq \frac{M}{2\pi} < 0.1 \dots \dots \dots (31)$$



注) 図中中程の 0, 0.5, 1 ……15 は波高 $H(m)$ を示す

図-3 連続孤立波の波長、波速の計算図

M の値は H/h の関数で 図-3 に示す値となる。

孤立波に関する諸性質は次式のようなのである。

波形

$$\eta = H \operatorname{sech}^2 \left\{ \sqrt{\frac{3H}{4h^3}} (x-ct) \right\} \dots\dots\dots (32)$$

波速

$$C = \sqrt{gh} \left\{ 1 + \frac{1}{2} \left(\frac{H}{h} \right) - \frac{3}{20} \left(\frac{H}{h} \right)^2 \right\} \dots\dots\dots (33)$$

水粒子の移動速度

$$u = \sqrt{gh} \left[\frac{\eta}{h} \left\{ 1 - \frac{5}{4} \frac{H}{h} - \frac{3}{2} \frac{H}{h} \left(\frac{2z}{h} + \frac{z^2}{h^2} \right) \right\} + \left(\frac{\eta}{h} \right)^2 \left\{ \frac{5}{4} + \frac{9}{4} \left(2 \frac{z}{h} + \frac{z^2}{h^2} \right) \right\} \right] \dots (34)$$

$$w = -\sqrt{gh} \left[\left\{ 3 \sqrt{\left(\frac{H}{h} \right)^3} \left(1 + \frac{z}{h} \right) \frac{\eta}{H} \tanh \left\{ \sqrt{\frac{3H}{4h^3}} (x-ct) \right\} \right\} \times \left\{ 1 - \frac{7}{8} \frac{H}{h} - \frac{1}{2} \frac{H}{h} \left(2 \frac{z}{h} + \frac{z^2}{h^2} \right) - \frac{H\eta}{2h^2} \left(1 - 6 \frac{z}{h} - 3 \frac{z^2}{h^2} \right) \right\} \right] \dots\dots\dots (35)$$

周期 T で孤立波がくる場合の平均質量輸送速度

$$\bar{u} = \frac{4}{\sqrt{3}} \frac{\sqrt{Hh}}{T} \dots\dots\dots (36)$$

全エネルギー

$$E = w_0 H^3 \left(\frac{4}{3} \frac{h}{H} \right)^{3/2} \dots\dots\dots (37)$$

エネルギーの輸送速度は波速 c に等しい。

③長波 2次元のオイラー (Euler) の運動方程式は

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + w \frac{\partial u}{\partial z} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} \\ \frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + w \frac{\partial w}{\partial z} &= -g - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (38)$$

連続方程式は

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \dots\dots\dots (39)$$

長波では w は u に比し小さいから, (38) の第2式から

$$\frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g \therefore p = -\rho g z + K \dots\dots\dots (40)$$

圧力 p は (40) 式から静水圧分布をすることがわかる。よって, z を静水面より上向にとつて,

$$p = \rho g (\eta - z) \dots\dots\dots (41)$$

(38) 式の第1式で w に関する項を (39) 式も考慮しつつ省略して

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}$$

(41) 式を代入して

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -g \frac{\partial \eta}{\partial x} \dots\dots\dots (42)$$

(39) 式を z で積分し,

$$(h+\eta) \frac{\partial u}{\partial x} + [w]_{z=h}^z = 0$$

w は底面で 0, 表面で $\partial \eta / \partial t$ であるから, $\eta \ll h$ として

$$h \cdot \frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{\partial \eta}{\partial t} \dots\dots\dots (43)$$

(42) (43) 式から u を消去して

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} \dots\dots\dots (44)$$

$$c = \sqrt{gh} \dots\dots\dots (45)$$

(44) 式は波動方程式でこの一般解は

$$\eta = f(x-ct) + F(x+ct) \dots\dots\dots (46)$$

であり, c は η なる波形が x 方向に進行する速度である。右辺第一項は進行波, 第二項は逆行波である。

水粒子の移速度 u は進行波について,

$$\eta = f(x-ct) = f(\theta)$$

として (42) 式に代入すれば,

$$-c \frac{\partial u}{\partial \theta} = -g \frac{\partial \eta}{\partial \theta}$$

$$\therefore u = \frac{g}{c} \eta + K$$

K は全体的流れであるから, 波動に伴う流速は

$$u = \frac{g}{c} \eta = \sqrt{\frac{g}{h}} \eta \dots\dots\dots (47)$$

である。

[1967. 8. 23. 受稿]